Instituto Integral de Educacion Permanente

Profesorado de Educación Tecnológica

Taller de Matemática

Docentes:
Abregú, Diego
Carrillo, Laura

Marzo de 2020

Números Naturales (N)

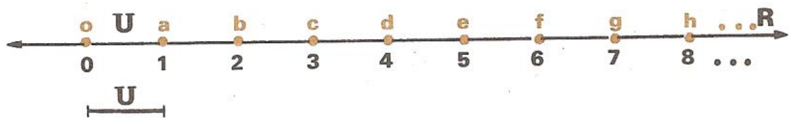
Los primeros números utilizados por los seres humanos fueron los números naturales puesto que surgieron de la naturaleza misma, de la necesidad que tenía el hombre de contar, hacer cálculos, hacer transacciones financieras, etc.: 1, 2, 3, 4,... .

El conjunto de Números Naturales se denota con **N**={1, 2, 3, 4,...}

Si se incluye el cero se escribe $\mathbf{N_0}$={0, 1, 2, 3, 4,...} y recibe el nombre de conjunto de números naturales ampliado.

<u>Propiedad del conjunto **N**:</u>

1. Es un conjunto de infinitos elementos.
2. Tiene primer elemento, el 1. Pero no tiene último elemento.
3. Todo numero natural tiene un sucesor
4. Es un conjunto ordenado según la relación del menor.
5. Todo número natural excepto el 1 tiene un antecesor.
6. Entre dos números naturales cualesquiera existe un número finito de números naturales, es por ello que se dice que es un conjunto *discreto*.
7. Es un conjunto ordenado por la relación de ≤ (menor o igual). En el se cumple la ley de tricotomía.
   Sea ***a, b** ϵ **N***:
   a < b (a menor que b)
   a = b (a igual a b)
   a > b (a mayor que b)
8. A este conjunto se lo puede representar en una recta numérica: sobre la recta **R** se marca un punto **o** y se elige un segmento **U** como unidad de medida. Se trasporta el segmento **U** en forma consecutiva a partir del origen **o** y a cada punto determinado se le hace corresponder ordenadamente un numero natural.



En la recta puede verse claramente el orden de estos números, por ejemplo: se cumple la ley de la tricotomía:

- 0 es menor que 2, simbólicamente 0 < 2
- 4 es mayor que 3, simbólicamente 4 > 3

En general, el número a es mayor que b (a > b), si a se encuentra a la izquierda de b.

En **N** están definidas dos operaciones llamadas *suma y producto*

$\forall a, b \ \in \boldsymbol{N}: a + b \ \in \boldsymbol{N}$

$y \ \forall a, b \ \in \boldsymbol{N}: a \,.\, b \ \in \boldsymbol{N}$

a partir de ellas se define la *sustracción* y le y la *división* de la siguiente manera:

$$a - b = c \ \Leftrightarrow c + b = a$$

$$a : b = c \ \Leftrightarrow c \,.\, b = a$$

La sustracción es posible en **N** siempre que a>b. cuando a≤b es necesario considerar el *cero (0)* y los números negativos -1, -2, -3, … para que a – b tenga solución.

Problemas de aplicación

Piensa y Practica

a. Un camión de reparto transporta 15 cajas de gaseosas de naranja y 12 cajas de gaseosas de limón. ¿Cuántas botellas lleva en total si cada caja contiene 24 unidades?

b. En la familia Juarez, el padre, Carlos, cobra $11.940 al mes. Si gana $720 más que Juan, el hijo mayor, $880 más que Carla, la hija que sigue, más joven, y $280 menos que Carolina, su mujer, ¿cuáles son los ingresos mensuales de la familia?

c. Un autobús con 54 turistas a bordo sufre un desperfecto mecánico camino del aeropuerto. Como no hay tiempo, pues el avión no espera, el responsable del grupo decide acomodar a los viajeros en taxis de cuatro plazas. ¿Cuántos taxis necesitan?

d. Una fábrica de autos ha producido 15.660 unidades entre enero, febrero y marzo. ¿Cuántos autos saca, por término medio, cada día?

e. El sector hotelero de una localidad turística ha contratado este mes a 12.845 personas. Tres de cada cinco son mujeres. ¿Cuántas mujeres han entrado a trabajar en el sector?

f. Entre las 8.300 sociedades inscritas en el registro de cierta comunidad autónoma, tres de cada cien son organizaciones sin ánimo de lucro (ONGs). ¿Cuántas ONGs hay registradas en la comunidad?

g. En una población de 8.400 habitantes, cuatro de cada cinco están en edad laboral; y de ellos, trabajan cinco de cada siete. ¿Cuántos habitantes trabajan?

h. Una sociedad financiera con el capital fraccionado en 25.000 acciones reparte unos beneficios de $37.500. ¿Qué dividendos corresponden a un inversor que posee 1.530 acciones?

i) Un camión transporta 5000 L de leche para suministrar a tres fábricas de productos lácteos. En la primera descarga 1500 L, y en la segunda, 865 L. Después de abastecer a la tercera fábrica, todavía quedan 1975 en la cisterna del camión; ¿con cuántos litros se ha aprovisionado a esta última?

j) En una panadería se dispone de 40 docenas de huevos para hacer 50 bizcochuelos y con los huevos que sobren, algunas galletas. Por cada bizcochuelo se emplean 6 huevos, y por cada docena de galletas, 4 huevos. ¿Cuántas galletas podrán hacerse?

k) En una granja avícola se han recogido 6500 huevos. En el control de calidad se retiran 260, Con el resto se preparan 120 cajas de dos docenas y los demás se reparten en cajas de una docena. ¿Cuántas cajas de una docena se preparan en total?

l) Una cooperativa posee un campo de 300 ha en el que se ha sembrado un 36 % de la superficie con maíz, 12 % con soja y el resto con alfalfa. ¿Cuántas hectáreas corresponden a cada vegetal sembrado?

Números Enteros Z

El conjunto formado por los números naturales o enteros positivos, el cero y los enteros negativos se denominan ***conjunto de números enteros*** y se designa con **Z,** que es una ampliación de los números naturales.

Se define el conjunto de números enteros **Z** como:

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \boldsymbol{N}$$

De otra forma el conjunto estaría representado **Z={ …; -3;-2;-1;0;1;2;3;…}**

Se conviene en ajustar los números enteros positivos a la derecha del 0 y los números enteros negativos a la izquierda. El cero divide la parte negativa de la positiva puesto que carece de valor y por ende no posee signo.

Se puede graficar mediante un diagrama de Venn de la siguiente manera:

<u>Propiedades del conjunto **Z**:</u>

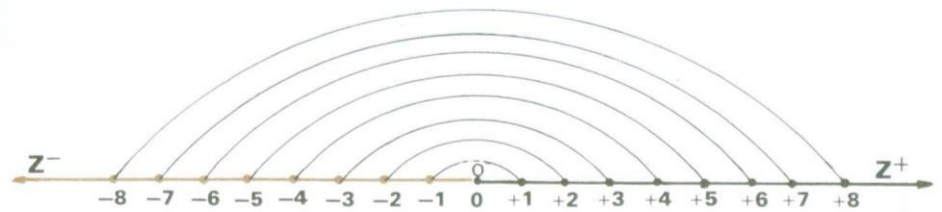
1. Es un conjunto de infinitos elementos.
2. No tiene primer elemento y tampoco tiene último elemento.
3. Todo número entero tiene un antecesor y un sucesor.
4. Un número entero y su sucesor se dicen consecutivos.
5. Entre dos números enteros cualesquiera existe una cantidad finita de números enteros. Por eso se dice que el conjunto **Z** es discreto.
6. Orden en **Z**: el conjunto **Z**esta totalmente ordenado por la relación de < o =. En él se cumple la ley de Tricotomia o de las tres Posibilidades: sean a,b є **Z**

a<b (a menor que b)

A=b (a es igual a b)

a>b (a mayor que b)

7. La recta numérica: si la semirrecta que se utilizo para representar a los números naturales se extendida en sentido opuesto, se puede representar a los números enteros. Dada una recta y un punto **o** que se hace corresponder a cero, se representan los enteros positivos sobre una semirrecta y los enteros negativos sobre otra semirrecta.



Los números opuestos están simétricamente dispuestos con respecto a o sobre la recta numérica. Por ello se llaman también **números simétricos**.

− 3 y + 3; − 5 y + 5 son números simétricos

Tienen sentido en **Z** , la suma, la sustracción y el producto, no así la división, ya que:

Para $a, b \in \boldsymbol{Z}, \text{con b} \neq 0,\ a{:}\,b \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow a\ es\ multiplo\ de\ b$

Luego es necesaria una ampliación del conjunto de los enteros para resolver este problema. Para ello aparecen el conjunto de los ***números fraccionarios*** (***F***), dando lugar al conjunto de los ***números racionales.***

Problemas de números enteros

a) Un emperador romano nació en el año 63 a. C. y murió en el 14 d. C. ¿Cuántos años vivió?
b) Una bomba extrae el petróleo de un pozo a 975 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 48 m de altura. ¿Qué nivel supera el petróleo?
c) ¿Qué diferencia de temperatura soporta una persona que pasa de la cámara de conservación de las verduras, que se encuentra a 4 ºC, a la del pescado congelado, que está a −18 ºC? ¿Y si pasara de la cámara del pescado a la de la verdura?

d) La temperatura del aire baja según se asciende en la atmósfera, a razón de 9 ºC cada 300 metros. Si la temperatura al nivel del mar en un punto determinado es de 0ªC, ¿a qué altura vuela un avión si la temperatura del aire es de −81 ºC?

e) En un depósito hay 800 lts. de agua. Por la parte superior un tubo vierte en el depósito 25 lts. por minuto, y por la parte inferior por otro tubo salen 30 lts. por minuto. ¿Cuántos litros de agua habrá en el depósito después de 15 minutos de funcionamiento?

NÚMEROS RACIONALES Q

Que se simboliza con ***Q***. y se define como:

$$\boldsymbol{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \boldsymbol{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Un número racional tiene dos tipos de expresión: como fracción y como expresión decimal

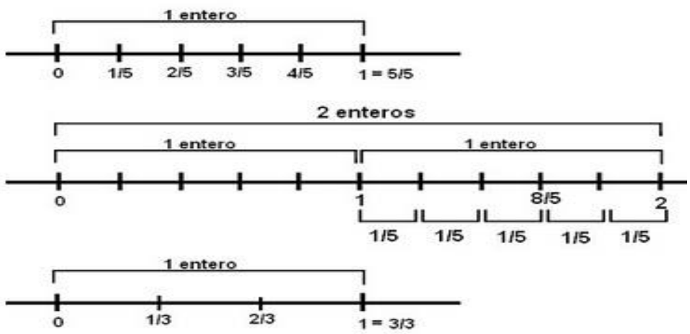
<u>Nota:</u> Una fracción es la parte de un entero. Es decir, un entero dividido en partes iguales de las cuales se considera alguna de ellas.

Una fracción es una forma de expresar una división, donde la raya de fracción indica una división.

En toda fracción el ***denominador*** indica la cantidad de partes ***"iguales"*** en que se divide la unidad, y el ***numerador***, la cantidad de partes que se considera.

<u>Propiedades del conjunto **Q**:</u>

1. Es un conjunto **infinito.**
2. No primer elemento ni último elemento.
3. Es un conjunto **denso**, es decir entre dos números racionales existe un conjunto infinito de números racionales.
4. Como consecuencia de la propiedad anterior, ningún número racional tiene antecesor ni sucesor.
5. Interpretación en la recta numérica: si sobre la recta fijamos un origen y un segmento unidad, a cada número racional le corresponde uno y solo un punto de la recta.
   Este conjunto se puede representar en una **recta numérica**:
6. Es un conjunto **ordenado**: el conjunto **Q** está totalmente ordenado por la relación del menor. Entre sus elementos se cumple la ley de la **tricotomía** o de las tres posibilidades.



Los números racionales pueden expresarse en formas de expresiones decimales periódicos; por ejemplo:

3 = 3, 000…

5/3 = 1,666…

29/90 = 0,3222…

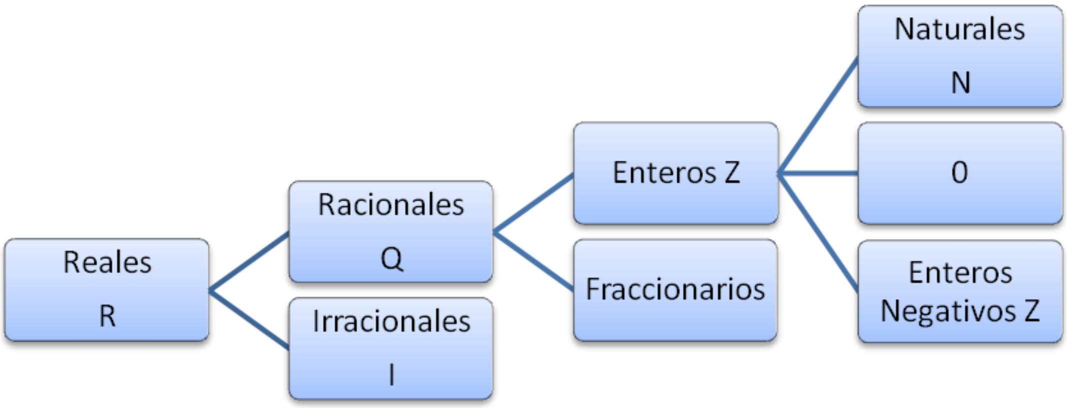
Existen números que tienen infinitas cifras decimales no periódicos y que por lo tanto no puede ser expresados fracciones, a estos números se los denomina ***irracionales*** y su conjunto se los simboliza con ***I.*** son números irracionales, por ejemplos: $\boldsymbol{\pi}, \sqrt{2},\ 2\sqrt{5}, e, etc.$

El conjunto de los números irracionales junto con el conjunto de los números racionales determinan el conjunto de los ***números reales*** que se denota con $\mathcal{R}$; es decir:

$\mathcal{R} = \mathcal{Q} \cup \mathbb{I}$

El conjunto de los números reales goza de las mismas propiedades que los números racionales.

El siguiente grafico muestra a modo de síntesis la ampliación sucesiva de los conjuntos numéricos:



PROBLEMAS CON FRACCIONES

1) ¿Cuántas botellas de ¾ de litro se pueden llenar con una garrafa de 30 litros?

2) Con el contenido de un bidón de agua se han llenado 40 botellas de ¾ de litro. ¿Cuántos litros de agua había en el bidón?

3) Dos hermanos se reparten las canicas de un bote. El primero se lleva 3/8del total, mientras queel segundo obtiene las 55 restantes. ¿Cuántas contenía el bote?

4) Un frasco de perfume tiene la capacidad de 1/20 de litro. ¿Cuántos frascos de perfume se pueden llenar con el contenido de una botella de ¾ de litro?

5) Jacinto se come los 2/7 de una tarta y Pepita los 3/5 del resto. ¿Qué fracción se ha comido Pepita? ¿Qué fracción queda?

6) De un depósito que contenía 600 litros de agua han sacado primero 1/6 del total y después3/4 del total. ¿Cuántos litros quedan?

7) Compramos un televisor por 1.300 € y pagamos ¼ al contado y el resto en 6 plazos. ¿Cuál será el importe de cada plazo?

8) De un depósito que estaba lleno se han sacado 2/3 del total y, después, 1/5 del total. Sabiendo que aún quedan 400 litros, ¿cuál era la capacidad del depósito?

9) Dos atletas llevan recorrido los3/12 y los 8/32 de una carrera, respectivamente. ¿Cuál de los dos va delante?

10) Un tonel de vino está lleno hasta los 7/11 de su capacidad. Se necesitan todavía 1.804 litros para llenarlo completamente. ¿Cuál es la capacidad del tonel?

11) De una cesta de manzanas se pudren 2/3. Comemos las 4/5 del resto y las 2/5 restantes las utilizamos para hacer mermelada. ¿Cuántas manzanas había en la cesta?

12) Entre 7 personas se reparten 4/9 de una herencia. Si cada uno recibe 1.750 €, ¿cuál es el total de la herencia?

13) Una persona ha cosechado durante la mañana 1/3 de un campo y por la tarde la mitad del resto. Si todavía le quedan 170 hectáreas, ¿cuál es la superficie total del campo?

EXPRESIONES ALGEBRAICAS, ECUACIONES E INECUACIONES

Expresiones algebraicas (E.A.): para facilitar la relación de algunas situaciones, puede ser necesario utilizar expresiones con distintos tipos de símbolos.

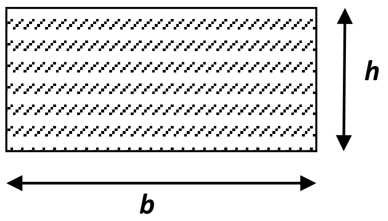
Una E.A. es una expresión que contiene números y letras, vinculados mediante operaciones aritméticas conocidas.

Ejemplos: $3.n+2$ $\quad$ $3.n^2+2.n$ $\quad$ $n^3-2.n+3$

Expresiones algebraicas equivalentes:

Al expresar una situación haciendo uso del algebra, pueden surgir expresiones que parecen diferentes pero que en realidad no lo son.

Sea por ejemplo, para averiguar el perímetro del siguiente rectángulo:



Perímetro del rectángulo $= b + b + h + h$

$= 2.b + 2.h$

$= 2.(b + h)$

Las tres expresiones utilizadas son E.A. Equivalentes, pues, si en cada una de ellas se remplaza la medida de la base y la altura por los mismos números, se obtiene el mismo perímetro.

Además se puede demostrar la equivalencia de dos expresiones algebraicas utilizándolas definiciones y las propiedades de las operaciones.

Ecuaciones:

Se denomina ecuación a toda igualdad entre dos expresiones algebraicas. Los valores que la verifican se denominan soluciones de las ecuaciones y forman el conjunto solución de dicha ecuación.

En toda ecuación el signo = separa en miembros y en cada miembro los signos + y – separan en términos.

En una ecuación las letras expresan las incógnitas y pueden tomar un solo valor, varios, infinitos o ninguno.

Resolver una ecuación es encontrar el/los valor/es de la/s incógnita/s que hace/n verdadera la igualdad.

Problemas:

1. ***Transformar en lenguaje algebraico las siguientes proposiciones:***

a) La mitad de un número más 3.
b) Tres números pares consecutivos.
c) La cuarta parte más la quinta parte de un número.
d) El triple del cuadrado de un número.
e) La diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos.
f) La raíz cuadrada de un número.
g) El doble de un número más 3 es igual a 15.
h) El cubo de un número es igual a 27.
i) El doble del cubo de un número.
j) El cubo del doble de un número.

2. Juana tiene 5 años más que Amparo. Si entre los dos suman 73 años, ¿qué edad tiene cadauna?
3. Un padre tiene 3 veces la edad de la hija. Si entre los dos suman 48 años, ¿qué edad tienecada uno?
4. Determinar tres números consecutivos que suman 444.

5. Tengo 3/2 de lo que vale un ordenador. ¿Cuánto vale el ordenador si me faltan sólo $318 para comprarlo?

6. Después de caminar 1500 m me queda para llegar al colegio 5/3 del camino. ¿Cuántos metros tiene el trayecto?

7. Un pastor vende 7/5 de las ovejas que tiene. Después compra 60 y así tendrá el doble de lasque tenía antes de la venta. ¿Cuántas ovejas tenía en un principio?

8. Determinar un número que sumado con su mitad y su tercera parte de 55.

9. Tres socios tienen que repartirse $ 3.000 de beneficios. ¿Cuánto le tocará a cada uno, si elprimero tiene que recibir 3 veces más que el segundo y el tercero dos veces más que elprimero?

Trabajo Práctico Nº1: Conjuntos numéricos

1) Resuelve las siguientes operaciones combinadas en N:

a) $27 + 3 \cdot 5 - 16 =$

b) $27 + 3 - 45 : 5 + 16 =$

c) $(2 \cdot 4 + 12).(6 - 4) =$

d) $3 \cdot 9 + (6 + 5 - 3) - 12 : 4 =$

e) $2 + 5 \cdot (2 \cdot 3)3 =$

f) $440 - [30 + 6\ (19 - 12)] =$

g) $2\ \{\ 4\ [7 + 4\ (5 \cdot 3 - 9)] - 3\ (40 - 8)\} =$

h) $7 \cdot 3 + [6 + 2 \cdot (23 : 4 + 3 \cdot 2) - 7 \cdot 4] + 9 : 3 =$

2) Calcula el valor de la incógnita:

a) 7.X + 11= 3X+39

b) 2X-4= X+4

c) 3X-6= 3.(5.3-24:3)

d) 2x- (21-3):3+5X= 4X+3(2.4-3)

e) 7X+15-3X= 12 + (7.2+4.4):2

f) 3X+6+2X-2=4+5.3

g) 15X-30=15.(7-2)

h) 8X-4=6X+12

3) Resuelve:

a) $2^4 : (-4) + \sqrt{25}\,.4 + (3\,.3)^2 =$

b) $30 : (4 - 14) + (-8 : 2 - 3)\,.2 =$

c) $(15 - 4) + 3 - (12 - 5\,.2) - 9 =$

d) $\sqrt{12 + 24} + 15\,.7 - 2^3 : 4 - 21 =$

e) $-10 :\ 2^0 + (-8)\,.3^2 - 36 :\ 4 =$

f) $\sqrt[3]{-125} : 5 + \left[(-3)^2 + \sqrt[3]{125} : (-1)^5\right] - [(-2)^4]^0 =$

g) $\left(\frac{5}{9} - \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{5}\right)$

h) $\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right) . \left(\frac{3}{7} - \frac{5}{7}\right)$

i) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{8}\right) . \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{8}\right)$

j) $\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right)^2$

k) $\left(\frac{8}{5} - \frac{6}{9}\right)^{-1}$

l) $\sqrt[3]{-\frac{7}{8} + 1} + 2^{-2}$

m) $\left(-1 - \frac{1}{3}\right)^2 : \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^{-2}$

n)

$$2\,.\left(-\frac{1}{3}\right)-(-3)^{-2}+\sqrt[3]{-\frac{125}{27}}$$